ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Übung 7

Ausgabe: 11. Dezember 2006
Abgabe: 18. Dezember 2006

7.1 Optimale Codes und Huffman-Algorithmus

a) (Aus dem Vordiplom) Der Bit-String 1110011010100010010111111000 ist das Resultat einer Codierung eines Wortes w über dem Alphabet $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ mittels eines Huffman Codes. Der Huffman Baum wurde für untenstehende Verteilung konstruiert mit der Konvention, dass beim Zusammenfassen zweier Knoten jeweils dem schwereren die "1" zugeordnet wird. Bestimmen Sie w.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$P_X(x)$	$\frac{7}{128}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{10}{128}$	$\frac{16}{128}$	$\frac{18}{128}$	$\frac{28}{128}$	$\frac{32}{128}$

b) Formulieren Sie einen erweiterten Huffman-Algorithmus für D-äre Codes mit $D > 2$. Tip: In jedem Schritt des Algorithmus wird die Anzahl der aktiven Knoten um $D - 1$ reduziert. Am Schluss darf nur noch ein aktiver Knoten übrigbleiben. Führen Sie daher sogenannte Dummy-Knoten mit Wahrscheinlichkeit 0 ein, damit am Schluss ein ausgefüllter Baum entsteht.

c) Finden sie einen optimalen ternären Code für eine WSK-Verteilung mit den sechs Werten 0.3, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1 und 0.1.

d) Eine Zufallsvariable Z kann die Werte A, B, C und D annehmen. Betrachten Sie die folgenden beiden binären, präfixfreien Codierungen für Z:

	A	B	C	D
Code 1	00	01	10	11
Code 2	0	10	110	111

Geben Sie eine Verteilung P_Z an, so dass beide Codierungen von Z optimal sind.

7.2 Bedingte Entropie und Fehlerwahrscheinlichkeit

Sei $N \geq 2$ und Y uniform verteilt auf $\{1, \ldots, N\}$. Weiter sei X eine Zufallsvariable auf $\{0, 1\}^N$ mit folgender Verteilung: Bedingt auf $Y = j$ werden an j (fixen) Positionen von X zufällige Bits gewählt und die restlichen $N - j$ Positionen mit Einsen aufgefüllt (für alle $j \in \{1, \ldots, N\}$).

a) Bestimmen Sie $H(X|Y)$.

b) Bestimmen Sie (numerisch) mit Hilfe der Fano-Ungleichung eine untere Schranke an die Fehlerwahrscheinlichkeit P_e bei der Schätzung von X aufgrund von Y im Falle $N = 4$ und $N = 8$. Wie verhält sich P_e im Grenzfall $N \to \infty$?

c) Berechnen Sie nun die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Schätzung von X aufgrund von Y bei Verwendung der bestmöglichen Strategie. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Resultaten aus Aufgabe b).