ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Übung 3

Ausgabe: 13. November 2006
Abgabe: 20. November 2006

3.1 Entropie

Sei X eine Zufallsvariable mit der rechts gegebenen Verteilung. Skizzieren Sie $H(X)$ als Funktion von ε. Bestimmen Sie insbesondere das Maximum von $H(X)$.

X	P_X
1	$1/2$
2	$1/12 + \varepsilon$
3	$5/12 - \varepsilon$

3.2 Forderungen an ein Unsicherheitsmass

In dieser Aufgabe werden wir ein Unsicherheitsmass definieren und zeigen, dass es den Forderungen (2)-(6) aus dem Skript genügt. Es scheint klar, dass die maximale Wahrscheinlichkeit $\max_x P_X(x)$ einer Verteilung P_X etwas darüber aussagt, wie zufällig die Variable X ist. Diese Beobachtung motiviert folgende Definition eines Unsicherheitsmasses, welches *Min-Entropie* genannt wird:

$$H_\infty(X) := -\log_2(\max_x P_X(x)).$$

a) Vergewissern Sie sich, dass zusätzliche Ereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 keinen Einfluss auf die definierte Grösse haben.

b) Zeigen Sie, dass eine Zufallsvariable X, die uniform auf L Elementen verteilt ist, eine kleinere Min-Entropie hat, als eine Variable Y, die uniform auf $L+1$ Elementen verteilt ist. Benutzen Sie dabei die Tatsache, dass die Funktion $-\log_2(\cdot)$ monoton fällt.

c) Beweisen Sie, dass $H_\infty(X) = 1$ falls X das Resultat eines fairen Münzwurfes darstellt und dass $H_\infty(Y) < 1$ für einen unfairen Münzwurf Y. Überlegen Sie, wie man dieses Resultat verallgemeinern könnte.

d) Seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen. Beweisen Sie, dass

$$H_\infty(XY) = H_\infty(X) + H_\infty(Y).$$

Tip: Sie müssen die Identität $\max_{(x,y)} P_X(x)P_Y(y) = (\max_x P_X(x))(\max_y P_Y(y))$ sowie die Unabhängigkeit von X und Y verwenden.

Die Min-Entropie erfüllt ebenfalls die Forderungen (1) und (7). Die Aussage im Skript, dass die Entropie die einzige Funktion sei, die diese Forderungen erfüllt, ist somit falsch.

3.3 Zufallsvariablen und Entropie

Seien X und Y zwei unabhängige, faire Münzwürfe, wobei "Kopf" als "0" und "Zahl" als "1" codiert sind.

Weiter seien die Zufallsvariablen A, B, C und D gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= X \cdot Y + X \quad \text{(als ganze Zahlen)} \\ B &= XY \\ C &= (X+Y) \bmod 2 \\ D &= BC \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_A, P_B, P_C und P_D.

b) Berechnen Sie die gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_{XY} und P_{AC}.

c) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P_{D|C=1}$ und $P_{B|A\neq 2}$.

d) Sind die Variablen A und C statistisch unabhängig? Wie steht es mit X und C?

e) Berechnen Sie $H(A)$, $H(C)$, $H(AC)$.

f) Was für eine Beziehung besteht zwischen den Werten $H(XY)$, $H(B)$ und $H(D)$?

3.4 Entropiediagramm

Gegeben seien die drei unabhängigen Zufallsvariablen X, Y und Z. Sei $U := XZ$ und $V := YZ$. Zeichnen Sie ein Entropiediagramm, in welchem $H(X), H(Y), H(Z)$, $H(U)$ und $H(V)$ als Flächen dargestellt werden, und welches die Beziehung zwischen diesen Entropien verdeutlicht.