ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Übung 2

Ausgabe: 06. November
Abgabe: 13. November

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein Testverfahren für eine Krankheit, an der eine Person mit Wahrscheinlichkeit $p_K = 0.00001$ erkrankt, d.h. es tritt durchschnittlich ein Erkrankter auf 100.000 Einwohner auf. Das Testverfahren hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $p_F = 0.01$, d.h. das Testergebnis ist mit Wahrscheinlichkeit 0.99 korrekt (sowohl im positiven wie im negativen Fall).

a) Alice lässt sich testen; der Test fällt positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet Alice trotz des Testergebnisses nicht an der Krankheit? Vergleichen Sie mit der A-priori-Wahrscheinlichkeit.

b) Bobs Test fällt negativ aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Bob dennoch von der Krankheit betroffen? Vergleichen Sie mit der A-priori-Wahrscheinlichkeit.

2.2 Charakteristische Grössen für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In einer Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X steckt im Allgemeinen sehr viel Information. Deshalb wird eine Verteilung oft durch gewisse charakteristische Grössen beschrieben, wie z.B. den Erwartungswert oder die Varianz bei reellwertigen Zufallsvariablen. In dieser Aufgabe geht es darum, noch weitere solche charakteristische Grössen zu finden, die je nach Situation mehr oder weniger aussagekräftig sind.

Stellen Sie sich vor, die PINs für irgendwelche Kreditkarten werden unabhängig gemäss einer fixen Verteilung P_X gewählt (nicht notwendigerweise die Gleichverteilung), und können vom Benutzer nicht mehr abgeändert werden.

a) Welche charakteristische Grösse von P_X entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Betrüger, der eine Kreditkarte auf der Strasse findet, den dazugehörigen PIN (mit einer optimalen Strategie) auf Anhieb richtig errät, falls er die Verteilung P_X kennt?

b) Welche charakteristische Grösse von P_X entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein Betrüger, der eine Kreditkarte auf der Strasse findet (jedoch die Verteilung P_X *nicht* kennt), die Kreditkarte benutzen kann, indem er den PIN *seiner* Karte gebraucht? Geben Sie die Menge der Elementarereignisse $\mathcal{E}$ sowie das Ereignis $\mathcal{A}$, dass der Betrüger Erfolg hat, an.

c) Welche charakteristische Grösse von P_X entspricht der maximalen Anzahl von Versuchen, die ein Betrüger braucht, um Geld abzuheben? Ist dies ein gutes Mass für die Sicherheit der Karte? Versuchen Sie selber eine charakteristische Grösse von P_X zu finden, welche ihrer Meinung die Sicherheit der Karte besser wiederspiegelt.

2.3 Markov-Kette

Seien X und Z zwei Zufallsvariablen über dem Alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$ mit folgender gemeinsamer Verteilung:

$$P_{XZ}(x, z) = \begin{cases} 1/8 & \text{falls } |x - z| \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } |x - z| \text{ gerade} \end{cases}$$

Geben Sie eine Zufallsvariable Y über einem Alphabet mit 2 Symbolen an, so dass

$$X \to Y \to Z$$

eine Markov-Kette ist.

2.4 Markov-Zustandsautomaten

Geben sei die Zustandsübergangsmatrix eines Markov-Zustandsautomaten:

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} = (p_X(x_i|x_j))_{ij}$$

Dieser Markov-Automat beschreibt das Verhalten eines bei einem Brettspiel mitgelieferten Zufallsgenerators. Der Automat hat einen Knopf und eine Anzeige, auf der der aktuelle Zustand X angezeigt wird. Immer, wenn der Knopf gedrückt wird, findet ein Zustandsübergang statt.

a) Zeichnen sie den Zustandsautomaten, benennen sie die Zustände, und beschriften sie die Kanten mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Angenommen, der Automat befindet sich im Zustand 1 ($X = x_1$). Berechnen sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_3(X|x_1)$ des Zustands des Automaten nach 3 Zustandsübergängen.

c) Berechnen sie die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ der Zustände des Automaten.

d) Wenn der momentane Zustand des Automaten bekannt ist, was sagen die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ über die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zustands des Automaten nach dem nächsten Zustandsübergang aus? Was sagen sie über die Situation nach 100 Zustandsübergängen aus?