

Kapitel 13: Syndromcodierung / Hamming Codes



Ziele des Kapitels

ETH

- Lineare Codes
- Zyklische Codes

Parity-Check-Matrix

ETH

- **Theorem:** Die Minimaldistanz eines linearen Codes mit Parity-Check-Matrix H ist gleich der minimalen Anzahl von Spalten in H , die linear abhängig sind

Parity-Check-Matrix

ETH

- Beweis: Wenn H insgesamt t linear abhängige Spalten h_i enthält, wobei

$$\sum_{i=1}^N c_i h_i = 0$$

- Mit höchstens t verschiedenen $c_i \neq 0$, dann ist $[c_1, \dots, c_N]$ ein Codewort mit minimalem Gewicht $w = d_{\min}$

Parity-Check-Matrix

ETH

- Umgekehrt, wenn $[c_1, \dots, c_N]$ ein Codewort mit minimalem Gewicht $w = d_{\min}$
- Dann sind die den Symbolen $c_i \neq 0$ entsprechenden w Spalten von H linear abhängig

Syndromcodierung

ETH

- Wir betrachten das Problem der Fehlerkorrektur für lineare Codes
- Fehlerkorrektur ist immer komplexer als Fehlerdetektion
- Der allgemeine Aufwand zum Vergleich eines empfangenen Codewortes mit allen möglichen Einträgen ist $O(q^N)$
- Für lineare Codes gibt es ein effizienteres Verfahren in $O(q^{N-K})$
- Dazu verwenden wir folgende Annahme

Syndromcodierung

ETH

- Das Codewort c werde im Kanal durch einen Fehlervektor e in ein Wort $(c+e)$ verfälscht
- Durch Multiplikation mit H erhalten wir das sogenannte **Syndrom** s , so dass

$$s = (c+e) \cdot H^T = c \cdot H^T + e \cdot H^T = 0 + e \cdot H^T = e \cdot H^T$$
- Bei Annahme von Gleichverteilung der Codewörter kann Fehlerkorrektur wie folgt erreicht werden:
 - Wir schätzen e aufgrund von s
 - Wir korrigieren das empfangene Codewort durch Subtraktion
- Implementierung mittels einer Tabelle, die jedem der $O(2^{N-K})$ Syndrome ein Fehlermuster minimalen Gewichts zuweist

Syndromcodierung

ETH

- Gegeben: Binärer $[5,2]$ Code mit

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n-k$$

I_K A

- Auflisten aller möglichen $2^{N-K}=8$ Syndrome

Syndrom	Muster (e)		
000	00000	$w=0$	Jeder Spalte der Matrix H wird ein Fehlervektor zugeordnet bei dem 1 Bit gesetzt ist
001	00001	$w=1$	
010	00010	$w=1$	
011	00011	$w=2$	

Syndromcodierung

ETH

Syndrom	Muster (e)	
100	00100	$w=1$
101	01000	$w=1$
110	00110	$w=2$
111	10000	$w=1$

- Prinzip: Minimales Gewicht w_{\min} bezüglich aller mit Syndrom konsistenter Fehlermuster
 - $r = c + e = 11110$ empfangen
 - $\rightarrow s = r \cdot H^T = 100 \rightarrow e = 00100$ (aus der Syndromtabelle)
 - $\rightarrow r - e = 11 \quad 010 = c \rightarrow a = 11$
 - ↳ Parity-Check Prüfbits

Anmerkungen

ETH

- Bei einem Linearcode entsteht dann und nur dann eine nichterkennbare Verfälschung, wenn $w(e) \geq d_{\min}$ ist
- Dann könnte e ein Kanalcodewort sein
- Gilt die Bedingungen zur Mindestdistanz, so ist r ein Kanalcodewort, wenn

$$r \cdot H^T = 0$$
- Sollen alle Fehlermuster korrigierbar sein, deren Distanz $w(e) \leq s$ ist, so kann man die Anzahl der $(N-K)$ erforderlichen Kontrollbits berechnen

Anzahl von Kontrollbits

ETH

- Wir berechnen die Mindestanzahl der erforderlichen Kontrollbits
- Gegeben sei ein Kanalcode mit Codewörtern $[c_1, \dots, c_N]$ der Länge N , sowie d_{\min}
- Aufgrund von Verfälschungen gibt es

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

- Binärfolgen der Distanz i
- Davon sind nur 2^K Folgen Kanalwörter mit Distanz $\geq d_{\min}$

Anzahl von Kontrollbits

ETH

- Damit alle Fehler $\leq s$ korrigierbar sind, muss gelten

$$2^N \geq 2^K \left(1 + \binom{N}{1} + \binom{N}{2} + \dots + \binom{N}{r} \right)$$

- Damit ist K berechenbar
- Es gilt:

$$2^K \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \rfloor} \binom{N}{i}$$

Anzahl von Kontrollbits ETH

- Kanalcode mit $N=7$ und $d_{\min}=3$. Berechnen K
- Ein Fehler korrigierbar, zwei erkennbar

$$2^7 \geq 2^K \left(1 + \binom{7}{1} \right)$$

$$2^7 \geq 2^K \cdot 2^4$$

$$K \leq 4$$

- Das heisst bei 4 Nutzbits erhält man 16 Quellcodewörter sowie 3 Kontrollbits pro Wort

Hamming Codes ETH

- Eine bedeutende Klasse linearer Codes sind die **Hamming Codes**
- Für jedes $r > 1$ gibt es einen Code der Länge $N=2^r-1$ mit $K=N-r$ Informationsbits und $d_{\min}=3$
- Je grösser K , desto näher an 1 ist die Rate
- Jeder Hamming-Code kann einen Fehler pro Block korrigieren
- Je länger der Block, desto kleiner die tolerierbare Fehlerwahrscheinlichkeit des Kanals
- Beliebt bei kleinen Fehlerraten

Hamming Codes ETH

- Die $(r \times (2^r-1))$ Parity-Check-Matrix kann einfach konstruiert werden
- Sie besteht aus allen 2^r-1 vom Nullvektor verschiedenen Spalten
- Die Reihenfolge der Spalten ist damit noch nicht festgelegt
- Die Minimaldistanz folgt aus der Tatsache, dass sich keine zwei Spalten von H zu Null addieren, da sie verschieden sind
- Es gibt jedoch viele Spaltentripel, die linear abhängig sind

Praktische Konstruktion ETH

- Damit kann man einen Hamming-Code wie folgt konstruieren:
 1. Lege r und damit N fest, z. B. $r=3, N=7$
 2. Schreibe alle 2^r-1 vom 0-Vektor verschiedenen Spalten in H
 3. Ordne sie strukturell gemäss $H=[-A^T | I_{N-k}]$
 4. Extrahiere A^T aus $H=[-A^T | I_{N,k}]$
 5. Konstruiere die Generatormatrix $G=[I_k | A]$

Dies ist offensichtlich eine sehr einfache Methode, einen fehlerkorrigierenden Code zu konstruieren

Hamming - Code ETH

- $[7,4]$ das heisst $r=3$ und $N=7$
- $\text{Dim}(H) = r \times (2^r-1) = 3 \times 7$ Matrix

$$H = [-A^T | I_{N-k}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -A^T$$

Hamming - Code ETH

$$G = [I_k | A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Duale Hamming Codes

ETH

- Interessante Codes erhält man, wenn man die Parity-Check-Matrix eines Codes zur Generatormatrix eines weiteren Codes macht
- **Definition:** Ein Code C' ist **dual** zu einem Code C , wenn die Generatormatrix von C' eine Parity-Check-Matrix von C ist
- Im dualen Hamming-Code ist die Anzahl der Informationsbits **kleiner** und die Minimaldistanz sehr **gross**
- Es gilt für den dualen Hamming-Code

$$d_{\min} = 2^{r-1}$$