ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

# Informationstheorie

# Lösung 4

## 4.1 Würfel

**a)** $\frac{\text{Anz. günstige Fälle}}{\text{Anz. mögliche Fälle}} = \frac{1}{16}$.

**b)** Falls $S = 4$, dann ist $(W_1, W_2, W_3) \in \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$, alle gleich wahrscheinlich, und somit

$$I(W_1; W_2|W_3, S = 4) = \underbrace{H(W_1|W_3, S = 4)}_{=\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0} - \underbrace{H(W_1|W_2W_3, S = 4)}_{=0} = \frac{2}{3}$$

**c)** Falls $P = 30$, dann ist $(W_1, W_2, W_3) \in \{(2,3,5),(2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2),(1,5,6),(1,6,5),(5,1,6),(5,6,1),(6,1,5),(6,5,1)\}$, alle gleich wahrscheinlich, und somit $H(W_1W_2W_3|P = 30) = \log_2 12$.

## 4.2 Entropie und Information

**a)** $I(XY; Z) - I(X; Z) = H(XY) - H(XY|Z) - H(X) + H(X|Z)$
$= H(Y|X) - H(Y|XZ) = I(Y; Z|X) \geq 0$

**b)** $H(XY|Z) - H(X|Z) = H(XYZ) - H(Z) - H(XZ) + H(Z)$
$= H(XYZ) - H(XZ) = H(Y|XZ) \geq 0$

**c)** $(H(XZ) - H(X)) - (H(XYZ) - H(XY)) = H(Z|X) - H(Z|XY)$
$= I(Z; Y|X) \geq 0$

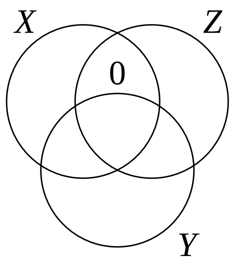
## 4.3 Markovketten

**a)** $H(XZ|Y) = H(X|Y) + H(Z|XY) = H(X|Y) + H(Z|Y)$. Die erste Gleichung folgt aus der Kettenregel, die zweite aus der Tatsache, dass $X \to Y \to Z$ eine Markovkette ist.

**b)** Mit Hilfe von Teilaufgabe a) erhält man

$$\begin{aligned}
I(XZ; Y) &= H(XZ) - H(XZ|Y) \\
&= H(XZ) - H(X|Y) - H(Z|Y) \\
&= H(Z) + H(X|Z) - H(X|Y) - H(Z|Y) \\
&= H(Z) - H(Z|Y) + H(X) - H(X|Y) - H(X) + H(X|Z) \\
&= I(Z; Y) + I(X; Y) - I(X; Z)
\end{aligned}$$

**c)** Ist $X \to Y \to Z$ eine Markovkette, dann hat das Entropiediagramm folgende Form.




Die Formeln aus (a) und (b) sind nun einfach zu sehen.

### 4.4 Informationstheorie im Bierglas

**a)** Die Verteilung von $S_1$ ist $P_{S_1} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ und somit $H(S_1) = H([\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}]) = \frac{3}{2}$.
Die bedingte Verteilung $P_{S_2|S_1}$ ist gegeben durch

| $P_{S_2\|S_1}$ | | $s_2$ = 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 |
| | 2 | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

und somit ist die gemeisame Verteilung $P_{S_1S_2} = P_{S_1}P_{S_2|S_1}$

| $P_{S_1S_2}$ | | $s_2$ = 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | 0 | 1/4 | 0 | 0 |
| | 1 | 1/4 | 1/4 | 0 |
| | 2 | 1/16 | 1/8 | 1/16 |

Folglich ist

$$\begin{aligned}
H(S_2|S_1) &= H(S_1S_2) - H(S_1) \\
&= H([\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}]) - \frac{3}{2} \\
&= \frac{19}{8} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

Weiter ist $H(S_2) = H([\frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{16}]) = \frac{29}{8} - \frac{3}{2}\log_2 3$ und somit

$$\begin{aligned}
I(S_1; S_2) &= H(S_1) + H(S_2) - H(S_1S_2) \\
&= H(S_2) - H(S_2|S_1) \\
&= (\frac{29}{8} - \frac{3}{2}\log_2 3) - \frac{7}{8} \\
&= \frac{11}{4} - \frac{3}{2}\log_2 3 \;\approx\; 0.373
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $S_1 \to S_2 \to S_3$ eine Markovkette ($S_3$ hängt nur von $S_2$ ab, und nicht von $S_1$ *und* $S_2$), und somit ist $I(S_1; S_3|S_2) = 0$.

**b)** Einerseits ist

$$H(S_2S_3\cdots|S_1) = H(S_1S_3\cdots) - H(S_1)$$

andererseits aber auch

$$\begin{aligned} H(S_2S_3\cdots|S_1) &= H(S_2S_3\cdots|S_1=0)P_{S_1}(0) \\ &\quad +H(S_2S_3\cdots|S_1=1)P_{S_1}(1) \\ &\quad +H(S_2S_3\cdots|S_1=2)P_{S_1}(2) \end{aligned}$$

Wegen $H(S_2S_3\cdots|S_1=0)=0$, $H(S_2S_3\cdots|S_1=1) = H([\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots]) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{16} +$ und $H(S_2S_3\cdots|S_1=2) = H(S_1S_2\cdots)$, erhalten wir die Gleichung

$$H(S_1S_2\cdots) - \frac{3}{2} = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} + H(S_1S_2\cdots)\cdot\frac{1}{4}$$

mit Lösung

$$H(S_1S_2\cdots) = \frac{10}{3}$$