ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Lösung 10

10.1 Decodierung

a) Die Rate ist $1/4$.

b) Angenommen, 0 werde gesendet. Ein Übertragungsfehler kann nur passieren, falls sowohl a als auch d auf b oder c verfälscht werden. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $(0.2 + 0.2)^2 = 0.16$. Dann könnte sowohl 0 als auch 1 gesendet worden sein, der Decoder muss raten und irrt mit WSK 0.08. Falls eine 1 gesendet wird, ist die Situation analog. Die Fehlerwahrscheinlchkeit ist 0.08.

c) Da $p_0 \leq 1/2$ wird der Decoder, falls er raten muss, immer auf 1 tippen. Ein Fehler geschieht also genau dann, wenn eine 0 gesendet wird und diese wie in b) verfälscht wird. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $p_0 \cdot 0.16$. Nun soll diese WSK kleinergleich ε sein, also muss $p_0 \leq \frac{\varepsilon}{0.16}$.

10.2 Minimaldistanz

a) Die Minimaldistanz ist 2. Somit kann ein Fehler erkannt und kein Fehler korrigiert werden.

b) Die Codewörter in C_1 sind linear abhängig. Eine möglichst kurze Representation von C_2 wird durch eine Basis erreicht. Z.B. $C_2 = \text{span}\{010101, 000111, 111000\}$.

c) $C_2 = \{000000, 000111, 111000, 010101, 010010, 101101, 111111, 101010\}$. Die Minimaldistanz ist immer noch 2 und 010010 hat Hamminggewicht 2.

d) Sei d die Minimaldistanz des Codes. D.h. es gibt zwei Codewörter c, c' mit Hammingdistanz d. Da der Code ein linearer Unterraum ist, ist auch $c - c'$ ein Codewort. $c - c'$ ist genau dort ungleich Null, wo sich c und c' unterscheiden. Dies ist an d Stellen der Fall, also hat $c - c'$ Hamminggewicht d.

Da das Codewort $\mathbf{0}$ in jedem linearen Unterraum vorkommt, kann die Minimaldistanz nicht grösser sein als das Hamminggewicht des leichtesten Codewortes ausser $\mathbf{0}$.

10.3 Kapazität des allgemeinen binären Kanals

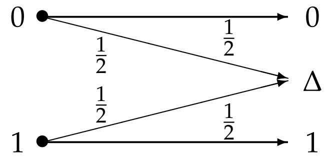
Die Kapazität ist null genau dann, wenn $\alpha = 1 - \beta$, denn dann ist die bedingte Outputverteilung unabhängig vom Input, $P_{Y|X}(\cdot, 0) = P_{Y|X}(\cdot, 1)$.

10.4 Kanäle und Kapazität (VD-Aufgabe Herbst 2001)

a)

Wir geben hier zwei einfache Varianten, die Aufgabe zu lösen:

- Betrachte einen binären Auslöschungskanal mit Auslöschungswahrscheinlichkeit $\delta = \frac{1}{2}$.



  Indem das Outputsymbol Δ dieses Kanals je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf Δ_1 oder Δ_2 abgebildet wird, erhält man den in der Aufgabe gegebenen Kanal. Umgekehrt kann mit dem in der Aufgabe gegebenen Kanal der obige Kanal simuliert werden, indem die Outputs Δ_1 und Δ_2 auf Δ abgebildet werden. Der Kanal aus der Aufgabe ist somit äquivalent zum oben abgebildeten Auslöschungskanal, d.h. die Kapazität ist gleich der Kapazität des binären Auslöschungskanals mit Auslöschungswahrscheinlichkeit $\delta = \frac{1}{2}$, also $C = 1 - \delta = \frac{1}{2}$ (siehe Beispiel 4.5 im Vorlesungsskript S. 56).

- Der Kanal aus der Aufgabe erfüllt folgende Bedingungen:

  (A) $H(Y|X = x)$ ist für alle x gleich.

  (B) Gleichverteilung am Kanalinput bewirkt Gleichverteilung am Kanaloutput.

  Aus (A) folgt, dass sich die Kapazität berechnen lässt als

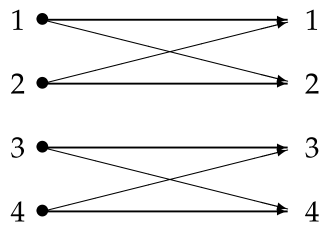
$$C = \max_{P_X} I(X;Y) = (\max_{P_X} H(Y)) - H(Y|X = x)$$

  für ein beliebiges x. Aus (B) folgt, dass sich Gleichverteilung am Kanaloutput erreichen lässt, womit die Entropie maximal wird. Es gilt also

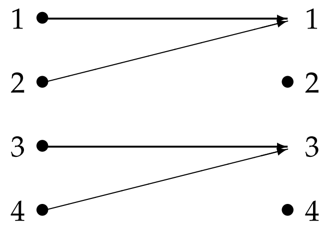
$$C = \log|\mathcal{Y}| - H[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0] = \log(4) - \frac{1}{2}\log(2) - 2 \cdot \frac{1}{4}\log(4) = \frac{1}{2}.$$

b)

Betrachte folgenden Kanal, für den alle mit Pfeilen bezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ sind:

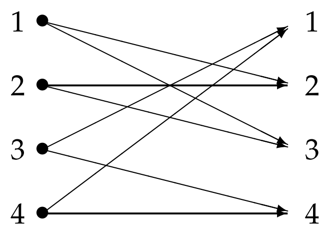


Dieser Kanal hat Kapazität 1, da er äquivalent zu einem binären fehlerfreien Kanal ist. Eine andere Lösung ist der folgende Kanal, wo alle Übergangswahrscheinlichkeiten 1 sind:



c)

Wiederum sind alle mit Pfeilen bezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten des folgenden Kanals $\frac{1}{2}$:



Dieser Kanal hat (analog zu Teilaufgabe b)) Kapazität 1 (es wurden lediglich die Outputs permutiert). Weiter ist der Output bei einer Serieschaltung zweier solcher Kanäle für jeden Input gleichverteilt, die Kapazität von K' also 0.

Eine andere mögliche Lösung (mit Übergangswahrscheinlichkeiten 1) ist folgende: