ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 06/07

Informationstheorie

Lösung 1

1.1 Zufallsexperimente und Zufallsvariablen

a) Der Würfelwurf ist beschrieben durch

- die Menge $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Elementarereignisse; hierbei tritt das Ereignis $e \in \{1, \ldots, 6\}$ ein, falls der Würfelwurf die Augenzahl e ergibt.
- das Wahrscheinlichkeitsmass P, welches bei einem fairen Würfel

$$P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+, P(e) = \frac{1}{6}$$

ist.

Definitionsgemäss ist ein Ereignis eine Teilmenge der Menge $\mathcal{E}$ der Elementarereignisse. Es gibt also $2^{|\mathcal{E}|} = 2^6 = 64$ verschiedene Ereignisse.

b) $E(X) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$.
$\mathrm{Var}(X) = \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$.

c) Der Wurf zweier Würfel ist beschrieben durch

- die Menge $\mathcal{E} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$ der Elementarereignisse; hierbei tritt das Ereignis $(x_1, x_2) \in \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$ ein, falls Würfel i die Augenzahl x_i zeigt ($i \in \{1, 2\}$).
- das Wahrscheinlichkeitsmass P, welches bei zwei fairen Würfeln

$$P : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+, P((x_1, x_2)) = \frac{1}{36}$$

ist.

Es gibt $2^{|\mathcal{E}|} = 2^{36}$ verschiedene Ereignisse.

Der Erwartungswert und die Varianz sind nur für reellwertige Zufallsvariablen definiert. Für X_1 und X_2 ergeben sich die gleichen Erwartungswerte und Varianzen wie für X zuvor:
$E(X_1) = E(X_2) = E(X) = \frac{7}{2}$.
$\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = \mathrm{Var}(X) = \frac{35}{12}$.

d) Es sind nur die Werte mit Wahrscheinlichkeit ungleich Null angegeben.

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_S(s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

p	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P_P(p)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P_{SX_1|X_2}$ und $P_{X_1|SX_2}$ lassen sich einfach beschreiben:

$$P_{SX_1|X_2}(s, x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } s = x_1 + x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$P_{X_1|SX_2}(x_1, s, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s = x_1 + x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

e) Die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(S > 4) = \sum_{e \in \mathcal{E}:S(e)>4} P(e) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

f) $E(X) := 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2}$.
$\mathrm{Var}(X) = \frac{49}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{124}{48} = \frac{31}{12}$.

g) $E(Y_1) := 1 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 16 \cdot \frac{1}{12} + 25 \cdot \frac{1}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{274}{12} = \frac{137}{6} = 22\frac{5}{6}$.
$E(Y_2) := \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{36}{144} = \frac{1}{4}$.
$E(Y_3) := \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{P_X(x)} P_X(x) = \sum_{x=1}^{6} 1 = 6$.

1.2 Fensterlädenkommunikation

a) 4 Zustände können mit 2 Zeichen binär dargestellt werden. Das erste Zeichen wird von 12 Uhr bis 13 Uhr angezeigt, das zweite von 13 Uhr bis 14 Uhr. Die konkrete Zuordnung kann beliebig gewählt werden. Hier ist eine Möglichkeit, wobei O “geöffnet” und G “geschlossen” bedeutet.

Läden	Bedeutung
“OO”	18:00
“OG”	20:15
“GO”	20:45
“GG”	21:00

Die Übertragung dauert immer 2 Stunden.

Wäre es möglich, für 18:00 nur “O” zu wählen? Die Übermittlung wäre kürzer, aber immer noch eindeutig. Das Problem bei dieser Lösung ist, dass Beat bei einem “O” ja gar noch nicht weiss, ob die Übermittlung bereits zu Ende ist oder nicht. Beat wird also trotzdem auf die zweite Übertragung warten müssen. Und Annemarie wird die Läden geöffnet lassen müssen, da Beat sonst meinen könnte, es wäre “OG” übermittelt worden. Das Verfahren muss also so gewählt werden, dass Beat am Ende der übertragenen Zeit auch weiss, dass die Übertragung nun zu Ende ist.

b) Da 20:15 nun sehr häufig auftritt, möchten wir, dass es weniger Zeit benötigt als bei a). Es soll also mit nur einem Zeichen übermittelt werden können. Wir wählen

"O". Da Beat wissen muss, dass das Zeichen nun fertig ist, müssen alle anderen mit "G" beginnen. 21:00 wollen wir nun mit 2 Zeichen darstellen, und wählen "GO". Die restlichen beiden müssen nun mit "GG" beginnen. Wir haben keine andere Wahl, als diese mit 3 Zeichen darzustellen. Wir erhalten:

Läden	Bedeutung
"GGO"	18:00
"O"	20:15
"GGG"	20:45
"GO"	21:00

Die mittlere Übermittlungszeit ist nun

$$0.5 \cdot 1h + 0.25 \cdot 2h + 0.125 \cdot 3h + 0.125 \cdot 3h = 1.75h,$$

also kleiner als bei a).

c) Der Grund ist, dass die Verteilung in b) weniger zufällig ist. Während Beat bei a) nichts weiss, hat bei b) doch schon eine gewisse Vorahnung, wann sie gehen werden. Dadurch braucht Annemarie ihm weniger Information zu übermitteln.

d) Da Beat bereits weiss, welches Kino nicht in Frage kommt, weil sie bereits letzte Woche dort waren, braucht Annemarie nur noch ein Bit zu übertragen, nämlich welches der beiden übrigen Kinos sie nun gewählt hat. Sie übermittelt also z. B. in der ersten Stunde den Ort, und danach die Zeit.

e) Da Beat alles weiss, braucht Annemarie ihm nichts mehr mitzuteilen! Die Übertragungszeit ist also $0h$.

1.3 Schlechtwetterkommunikation

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Fehler auftreten, ist ε^2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler an der ersten Stelle auftritt, ist $\varepsilon(1-\varepsilon)$. Und ebenso gross für die zweite Stelle. Für zwei Übertragungen ergibt dies also eine Fehlerwahrscheinlichkeit von

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon) = \varepsilon(2-\varepsilon) = 0.1(2-0.1) = 0.19$$

Für 3 Übertragungen ergibt sich analog

$$\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) + 3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 = 0.001 + 0.027 + 0.243 = 0.271$$

b) 2 Übertragungen: Wir wählen folgendes Vorgehen: Annemarie sendet alles doppelt. Wenn Beat zweimal das gleiche sieht, entscheidet er sich für diesen Wert. Sonst wählt er zufällig einen Wert. Er wählt also bei allen doppelten und bei der Hälfte der einfachen Fehlern falsch. Das ergibt total einen Fehler von

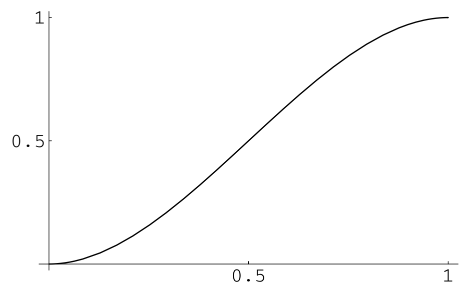
$$\varepsilon^2 + \frac{1}{2}2\varepsilon(1-\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon(1-\varepsilon) = \varepsilon$$

Die Fehlerrate wurde also nicht verbessert! Es gibt kein Verfahren, welches die Fehlerwahrscheinlichkeit mit nur 2 Übertragungen verbessert.

3 Übertragungen: Wir wählen folgendes Vorgehen: Annemarie sendet alles dreifach. Beat wählt denjenigen Wert, den er öfters sieht. Er macht immer dann einen Fehler, wenn 2 oder 3 Fehler auftreten. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist also

$$\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(1-\varepsilon) = \varepsilon^2(3-2\varepsilon)$$

Dies ergibt folgende Kurve, wobei die X-Achse ε, und die Y-Achse die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit ist.



Wenn wir $\varepsilon = 0.1$ einsetzen, bekommen wir

$$0.01(3 - 2 \cdot 0.1) = 0.028.$$

c) Wenn wir $\varepsilon = 0.5$ einsetzen, bekommen wir $0.25(3-1) = 0.5$. Das heisst, der Fehler konnte nicht verbessert werden. Auch mit jedem anderen Verfahren ist dies nicht möglich. Der Grund hierfür ist, dass der Output immer gleichverteilt ist und überhaupt nicht vom Input abhängt, es findet also überhaupt keine Kommunikation statt! Beat könnte genauso gut jedes mal eine Münze werfen.

d) Die Fehlerwahrscheinlichkeit kann verbessert werden, indem jedes Bit mit dem Verfahren von b) geschickt wird. Die Übertragung jedes der beiden Bits hat eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\varepsilon' = 0.028$. Eingesetzt in die Formel von a) ergibt dies

$$0.028(2 - 0.028) \approx 0.055.$$