ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 05/06

Informationstheorie

Übung 2

Ausgabe: 7. November 2005
Abgabe: 21. November 2005

2.1 Über die Güte von Wetterprognosen

Eine mehrjährige statistische Untersuchung über die Zuverlässigkeit der Wettervorhersagen des bekannten Wetterfrosches Jörg Kachelmann ergab die folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von Kachelmanns Vorhersage V und dem wirklich eintreffenden Wetter W (wobei der Einfachheit halber beide Zufallsvariablen nur die zwei Werte *regen* und *schön* annehmen können).

		W	
	P_{VW}	*regen*	*schön*
V	*regen*	2/16	3/16
	schön	3/16	8/16

a) Wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit $P[W \neq V]$ von Kachelmanns Vorhersage, und wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit $P[W \neq V']$ der (zugegebenermassen sehr optimistischen) Vorhersage V', die immer *schön* lautet?
Welche der beiden Vorhersagen ist demnach besser?

b) Angenommen, Sie möchten ein Grillfest organisieren, und natürlich wollen Sie, dass das Wetter an diesem Tag *schön* ist. Welche der beiden Vorhersagen, V oder V', gibt Ihnen die bessere Chance einen Tag auszuwählen, an dem es *schön* ist?
Wie sieht es aus, wenn Sie – für was auch immer – einen regnerischen Tag brauchen?
Welche der beiden Vorhersagen scheint aus dieser Sicht besser zu sein?

c) Betrachten Sie zum Abschluss noch die Vorhersage V'', die immer das falsche prognostiziert, d.h. die Fehlerwahrscheinlichkeit $P[W \neq V'']$ ist 1. Argumentieren Sie, wieso diese Vorhersage in einem gewissen Sinn doch ganz gut ist.

d) Welche der drei diskutierten Vorhersagen V, V' und V'' gibt intuitiv am meisten und welche am wenigsten Information über das Wetter W?

2.2 Stochastischer Prozess

Ein Stochastischer Prozess ist gegeben durch die Zufallsvariablen $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$ mit den möglichen Werten $X_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Der Startwert X_0 ist gleichverteilt auf dem Wertebereich. Für alle $i > 0$ ergibt sich X_i aus X_{i-1} mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(X_i = x) = \begin{cases} 0.5 & X_{i-1} \equiv (x+1) \bmod 5 \\ 0.5 & X_{i-1} \equiv (x-1) \bmod 5 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Zustand kann also auf einem mit 0–4 beschrifteten Ring eine Stelle nach links oder rechts wandern.

a) Berechnen sie den Erwartungswert und Varianz von X_0.

b) Ist $X_0, X_1, \ldots$ eine Markov-Kette? Warum?

c) Beweisen sie: Alle X_i sind gleichverteilt.

d) Zeigen sie, dass der Prozess stationär ist. Hinweis: Berechnen sie die Verbundwahrscheinlichkeiten $P(X_t, \ldots, X_{t+n})$ und benutzen sie sie für eine Induktion über n.

2.3 Markov-Kette

Seien X und Z zwei Zufallsvariablen über dem Alphabet $\{1, 2, 3, 4\}$ mit folgender gemeinsamer Verteilung:

$$P_{XZ}(x, z) = \begin{cases} 1/8 & \text{falls } |x - z| \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } |x - z| \text{ gerade} \end{cases}$$

Geben Sie eine Zufallsvariable Y über einem Alphabet mit 2 Symbolen an, so dass

$$X \to Y \to Z$$

eine Markov-Kette ist.

2.4 Markov-Zustandsautomaten

Geben sei die Zustandsübergangsmatrix eines Markov-Zustandsautomaten:

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} = (p_X(x_i|x_j))_{ij}$$

Dieser Markov-Automat beschreibt das Verhalten eines bei einem Brettspiel mitgelieferten Zufallsgenerators. Der Automat hat einen Knopf und eine Anzeige, auf der der aktuelle Zustand X angezeigt wird. Immer, wenn der Knopf gedrückt wird, findet ein Zustandsübergang statt.

a) Zeichnen sie den Zustandsautomaten, benennen sie die Zustände, und beschriften sie die Kanten mit den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

b) Angenommen, der Automat befindet sich im Zustand 1 ($X = x_1$). Berechnen sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_3(X|x_1)$ des Zustands des Automaten nach 3 Zustandsübergängen.

c) Berechnen sie die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ der Zustände des Automaten.

d) Wenn der momentane Zustand des Automaten bekannt ist, was sagen die totalen Wahrscheinlichkeiten $P(X)$ über die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zustands des Automaten nach dem nächsten Zustandsübergang aus? Was sagen sie über die Situation nach 100 Zustandsübergängen aus?