

Informationstheorie

Übung 10

Ausgabe: 23. Januar 2006

10.1 Blockcode auf binär-symmetrischem Auslöschungskanal

In der Sendung “Risiko” des Schweizer Fernsehen DRS muss der Kandidat Bob in der letzten Runde auf eine Reihe von Fragen antworten, um den Hauptpreis zu gewinnen. Bob’s Freundin Alice (sie ist viel gebildeter als er) sitzt im Publikum. Sie weiss die Antworten auf die Fragen und will sie Bob unauffällig mitteilen.

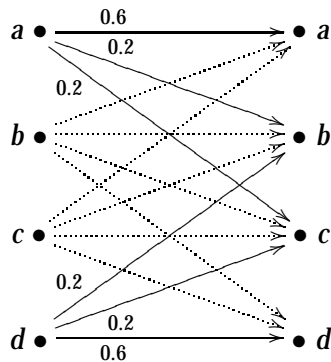


Dies will Alice erreichen, indem sie Bob zuzwinkert. Allerdings kann es sein, dass Bob nicht sieht, mit welchem Auge Alice gezwinkert hat (Wahrscheinlichkeit δ). Mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon < 0.5$ irrt sich Bob und er meint, dass Alice mit dem rechten Auge gezwinkert hat, obwohl sie mit dem linken Auge gezwinkert hat (und umgekehrt). Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \delta - \varepsilon$ sieht also Bob korrekt, mit welchem Auge Alice gezwinkert hat.

- a) Stellen Sie diesen diskreten, gedächtnisfreien Kanal zwischen Alice und Bob in unserer üblichen graphischen Notation dar!
- b) Wie gross ist die Kapazität C des Kanals zwischen Alice und Bob?
- c) Wir nehmen jetzt an, dass Bob eine Frage beantworten muss, wobei ihm die Moderatorin vier mögliche Antworten vorgibt. Durch 15-maliges Augenzwinken will Alice Bob die richtige Antwort mitteilen. Was ist die Rate dieses Codes? Sei $\varepsilon = 0.2$ und $\delta = 0.2$. Was sagt uns das Kanalcodierungstheorem 2. Teil bezüglich der in dieser Teilaufgabe geschilderten Situation?
- d) Es kann gezeigt werden, dass für einen beliebigen binären Blockcode und bei Übertragung über einen binär symmetrischen Kanal ein ML-Decoder realisiert wird, indem man das empfangene Wort zu einem Codewort mit minimaler Hammingdistanz decodiert. Formulieren Sie eine ähnlich einfache ML-Decodierregel für die Decodierung eines binären Codes bei der Übertragung zwischen Alice und Bob, falls sie m mal mit den Augen zwinkert.

10.2 Decodierung (aus Vordiplom Herbst 2003)

Betrachten Sie folgenden Kanal mit 4 Inputsymbolen und 4 Outputsymbolen:



Die gestrichelten Pfeile haben jeweils Wahrscheinlichkeit $1/4$.

Um ein Bit über diesen Kanal zu übertragen, wird folgende Codierung verwendet:

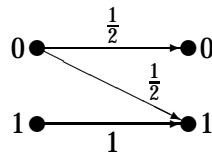
$$0 \Rightarrow abcd \quad 1 \Rightarrow dcba$$

Sei p_0 die Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 gesendet wird.

- Wie gross ist die Rate dieses Codes?
- Wie gross ist die Fehlerwahrscheinlichkeit eines ML-Decoders, falls $p_0 = 1/2$?
Tip: Diese Aufgabe erfordert keine aufwendige Rechnung.
- Es sei $p_0 \leq 1/2$. Wie gross darf p_0 maximal sein, damit ein ME-Decoder eine Fehlerwahrscheinlichkeit von ε nicht überschreitet?
- Unter welchen Bedingungen sind ME- und die ML-Decodierung identisch?

10.3 Kapazität von Kanälen

- Berechnen Sie die Kapazität C des sogenannten „Z-Kanals“.



Tip: Maximieren Sie durch ableiten.

- Berechnen Sie die Kapazität folgender zwei Kanäle. Kanal ii) unterscheidet sich von Kanal i) nur durch den zusätzlichen Input Γ .

