ETH Zürich
Dept. Informatik

Prof. Markus Gross
WS 05/06

Informationstheorie

Lösung 3

3.1 Entropie

Die Entropie von X ist

$$\begin{aligned} H(X) &= H([1/2,\, 1/12+\epsilon,\, 5/12-\epsilon]) \\ &= -1/2 \log_2(1/2) - (1/12+\epsilon)\log_2(1/12+\epsilon) - (5/12-\epsilon)\log_2(5/12-\epsilon) \\ &= 1/2 - (1/12+\epsilon)\log_2(1/12+\epsilon) - (5/12-\epsilon)\log_2(5/12-\epsilon) \end{aligned}$$

Als erstes sieht man, dass P_X nur für $-1/12 \leq \epsilon \leq 5/12$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Für die Intervallgrenzen ist die Entropie

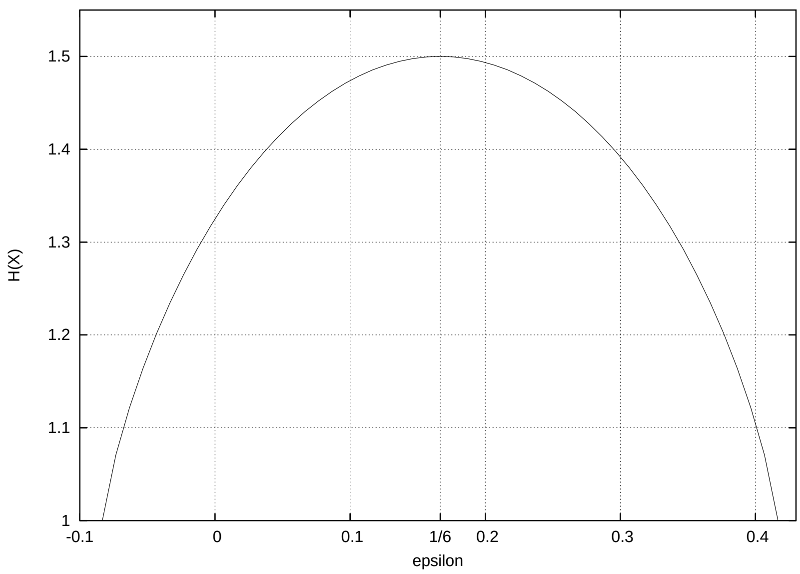
$$\begin{aligned} H(X|_{\epsilon=-1/12}) &= H([1/2, 0, 1/2]) = 1 \\ H(X|_{\epsilon=5/12}) &= H([1/2, 1/2, 0]) = 1 \end{aligned}$$

Um das Maximum zu finden, leiten wir diesen Ausdruck ab und finden die Nullstelle:

$$\frac{dH(X)}{d\epsilon} = -\log_2(1/12+\epsilon) + \log_2(5/12-\epsilon)$$

Dieser Ausdruck ist Null für $\epsilon = 1/6$. Das ist nicht weiter erstaunlich, da für dieses ϵ die Verteilung von X am nächsten an der uniformen Verteilung ist. Das Maximum ist

$$H(X|_{\epsilon=1/6}) = H([1/2,\, 1/4,\, 1/4]) = -1/2\log_2(1/2) - 1/4\log_2(1/4) - 1/4\log_2(1/4) = 3/2.$$



3.2 Zufallsvariablen und Entropie

a) Die Elementarereignisse sind $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$ und $[1,1]$. Alle Elementarereignisse haben Wahrscheinlichkeit $1/4$. Die Verteilungen der einzelnen Zufallsvariablen sind:

A	0	1	2
P_A	1/2	1/4	1/4

B	[0,0]	[0,1]	[1,0]	[1,1]
P_B	1/4	1/4	1/4	1/4

C	0	1
P_C	1/2	1/2

D	[[0,0],0]	[[0,0],1]	[[0,1],0]	[[0,1],1]	[[1,0],0]	[[1,0],1]	[[1,1],0]	[[1,1],1]
P_D	1/4	0	0	1/4	0	1/4	1/4	0

b)

		X	
	P_{XY}	0	1
Y	0	1/4	1/4
	1	1/4	1/4

			A	
	P_{AC}	0	1	2
C	0	1/4	0	1/4
	1	1/4	1/4	0

c)

D	[[0,0],0]	[[0,0],1]	[[0,1],0]	[[0,1],1]	[[1,0],0]	[[1,0],1]	[[1,1],0]	[[1,1],1]
$P_{D\|C=1}$	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0

B	[0,0]	[0,1]	[1,0]	[1,1]
$P_{B\|A\neq 2}$	1/3	1/3	1/3	0

d) A und C sind nicht statistisch unabhängig, denn es gilt zum Beispiel

$$P_A(1)P_C(0) \neq P_{AC}(1,0).$$

C und X sind statistisch unabhängig, denn

$$P_C(c)P_X(x) = P_{C|X}(c,x)P_X(x) = 1/4 = P_{CX}(c,x)$$

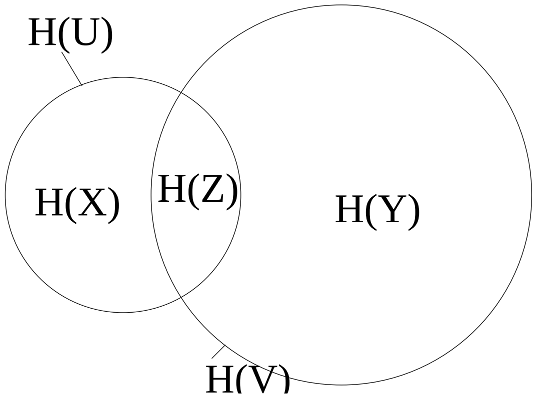
für alle c und x.

e)

$$\begin{aligned}
H(A) &= H[1/2, 1/4, 1/4] = 1/2 \cdot 1 + 1/4 \cdot 2 + 1/4 \cdot 2 = 1.5 \\
H(C) &= H[1/2, 1/2] = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 = 1 \\
H(AC) &= H[1/4, 1/4, 1/4, 1/4] = \log(4) = 2
\end{aligned}$$

f) Da die Verteilungen P_{XY} und P_B identisch sind, ist auch die Entropie gleich: $H(XY) = H(B)$. D ist eine Funktion von B und C, welche wiederum Funktionen von X und Y sind. Also gilt $H(D) \leq H(XY)$. Ein Ausrechnen der Entropien zeigt $H(D) = H(B) = H(XY)$.

3.3 Entropiediagramm



3.4 Entropie in der Physik

a) Das N-Tupel $X = (X_1, \ldots, X_N)$ kann selbst wieder als Zufallsvariable aufgefasst werden. Wegen $P_{X_i}(k) = \frac{1}{M}$ für alle $i \in \{1, \ldots, N\}$ und $k \in \{1, \ldots, M\}$ gilt $P_X(x_1, \ldots, x_N) = \prod_i P_{X_i}(x_i) = (\frac{1}{M})^N$.

b) $H(X) = -\sum_{x_1,\ldots,x_N} P_X(x_1, \ldots, x_N) \log_2(P_X(x_1, \ldots, x_N)) = -M^N \cdot \frac{1}{M^N} \log_2(\frac{1}{M^N}) = N \log_2(M) = N \log_2(\frac{V}{V_0})$.

c) Sei X' die Zufallsvariable für das Gas im doppelten Volumen $V' = 2V$. Ersetzen wir V in der Formel aus Teilaufgabe (b) durch V', erhalten wir $H(X') = N \log_2(\frac{2V}{V_0}) = N \log_2(\frac{V}{V_0}) + N \log_2(2) = N \log_2(\frac{V}{V_0}) + N$. Die Entropieänderung, die sich durch die Ausdehnung eines Gases auf das doppelte Volumen ergibt, beträgt somit $\Delta H = H(X') - H(X) = N$. Dies ist klar, da zur Beschreibung des Aufenthaltsortes jedes einzelnen Teilchens im doppelten Volumen ein Bit mehr Information erforderlich ist.

d) Aus $H(X) = N \log_2(\frac{V}{V_0}) = N \log_2(V) - N \log_2(V_0)$ folgt, dass bei gleichbleibender Teilchenzahl die Wahl von V_0 der Addition einer Konstanten zur Entropie entspricht. Die Entropieänderung ΔH ist somit unabhängig von der (willkürlichen) Konstanten V_0.

e) Dies bedeutet, dass die Unsicherheit über den genauen Zustand des Systems dauernd wächst und daher jeder physikalische oder chemische Vorgang so abläuft, dass die Information über den mikroskopischen Zustand immer kleiner wird. Dies gilt aber nur, solange das System sich selber überlassen wird, denn bei einem Eingriff von aussen darf das System nicht mehr als abgeschlossen betrachtet werden.