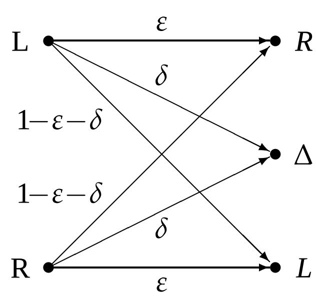
Informationstheorie

Lösung 10

10.1 Blockcode auf binär-symmetrischem Auslöschungskanal

a) Der Kanal zwischen Alice und Bob kann folgendermassen dargestellt werden (wir bezeichnen ihn als binär-symmetrischen Auslöschungskanal):



b) Der Kanal ist symmetrisch und deshalb ist $H(Y|X = x)$ für alle x gleich. Es muss also nur $H(Y)$ maximiert werden. Folgende Überlegungen zeigen, dass $H(Y)$ maximal ist, wenn die Werte am Kanalinput gleichverteilt sind (X gleichverteilt). Wir führen eine Zufallsvariable S ein:

$$S = \begin{cases} 0 & \text{falls } Y = \Delta \\ 1 & \text{falls } Y \neq \Delta. \end{cases}$$

Dann ist

$$H(Y) = H(YS) = H(Y|S) + H(S) = P_S(0)H(Y|S = 0) + P_S(1)H(Y|S = 1) + H(S)$$

Die erste Gleichung gilt, weil S durch Y vollständig definiert ist. Da $H(Y|S = 0) = 0$ erhalten wir

$$H(Y) = P_S(1)H(Y|S = 1) + H(S) = (1 - \delta)H(Y|S = 1) + H(S)$$

$(1 - \delta)$ und $H(S)$ hängen nicht von der Verteilung von X ab. $H(Y)$ ist also maximal, falls $H(Y|S = 1)$ maximal. Dies wird erreicht, wenn $Y = L$ und $Y = R$ gleichwahrscheinlich sind. Dies wiederum ist dann der Fall, wenn $P_X(L) = \frac{1}{2}$ und $P_X(R) = \frac{1}{2}$.

Deshalb ist:

$$C = H([\frac{1}{2}(1 - \delta), \delta, \frac{1}{2}(1 - \delta)]) - H([\varepsilon, \delta, 1 - \varepsilon - \delta]).$$

c) Die Kapazität des Kanals ist $C = 0.15098$ und die Rate $\frac{2}{15}$; somit ist die Rate kleiner als die Kapazität. Angenommen, Bob muss auf N Fragen jeweils eine von vier möglichen Antworten bestimmen. Gemäss dem Kanalcodierungstheorem 2.Teil kann Alice einen Code mit Codewortlänge $15N$ für die N Antworten finden, so dass die Decodierfehler-Wahrscheinlichkeit für Bob beliebig klein gemacht werden kann, falls N nur genügend gross gewählt wird.

d) Die einfache ML-Decodierregel ist:

1. ignoriere die Δ's
2. dekodiere zu demjenigen Wort mit minimaler Hammingdistanz

10.2 Decodierung

a) Die Rate ist $1/4$.

b) Angenommen, 0 werde gesendet. Ein Übertragungsfehler kann nur passieren, falls sowohl a als auch d auf b oder c verfälscht werden. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $(0.2 + 0.2)^2 = 0.16$. Dann könnte sowohl 0 als auch 1 gesendet worden sein, der Decoder muss raten und irrt mit WSK 0.08. Falls eine 1 gesendet wird, ist die Situation analog. Die Fehlerwahrscheinlchkeit ist 0.08.

c) Da $p_0 \leq 1/2$ wird der Decoder, falls er raten muss, immer auf 1 tippen. Ein Fehler geschieht also genau dann, wenn eine 0 gesendet wird und diese wie in b) verfälscht wird. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $p_0 \cdot 0.16$. Nun soll diese WSK kleiner-gleich ε sein, also muss $p_0 \leq \frac{\varepsilon}{0.16}$.

d) Falls die Input-Symbole gleichverteilt sind, sind die ME- und die ML-Decodierung identisch. (Natürlich ist die Gleichverteilung nur ein hinreichendes, aber nicht ein notwendiges Kriterium.)

10.3 Kapazität

a) Ist P_X mit $P_X(0) = p$ und $P_X(1) = 1 - p$ die Inputverteilung des Z-Kanals, dann ist die entsprechende Outputverteilung P_Y gegeben durch $P_Y(0) = \frac{p}{2}$ und $P_Y(1) = 1 - \frac{p}{2}$.
Weiter ist

$$I(X;Y) \;=\; H(Y) - H(Y|X) \;=\; -\left(\frac{p}{2}\log\frac{p}{2} + \left(1 - \frac{p}{2}\right)\log\left(1 - \frac{p}{2}\right)\right) - p$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} I(X;Y) &= -\left(\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log\frac{p}{2} - \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{p}{2}\right) + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\log\left(1 - \frac{p}{2}\right) - \log\frac{p}{2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{p} - 1\right) - 1
\end{aligned}$$

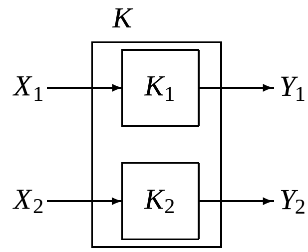


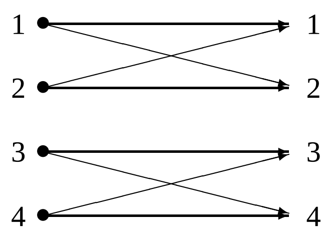
Abbildung 1: Zwei Kanäle in Parallelschaltung (Aufgabe 4).

Dieser Ausdruck ist null für $p = {}^2/_5$.

Die Kanalkapazität ist also $C = {}^1/_5 \log 5 + {}^4/_5 \log {}^5/_4 - {}^2/_5 \approx 0.322$.

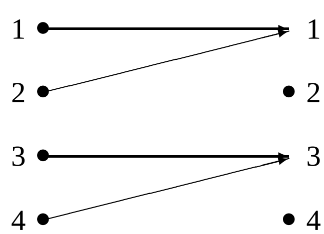
b) Bei beiden Kanälen ist $H(Y|X = x) = h(\varepsilon)$ für alle Inputsymbole x. Bei Kanal i) wird Gleichverteilung im Output durch Gleichverteilung im Input erreicht. Bei Kanal ii) wird Gleichverteilung im Output durch Gleichverteilung im Input über $\{1, \ldots, 5\}$ und $P_X(\Gamma) = 0$ erreicht. Beide Kanäle haben Kapazität $\log 5 - h(\varepsilon)$.

c) Betrachte folgenden Kanal, für den alle mit Pfeilen bezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten ${}^1/_2$ sind:



Dieser Kanal hat Kapazität 1, da er äquivalent zu einem binären fehlerfreien Kanal ist.

Eine andere Lösung ist der folgende Kanal, für den alle mit Pfeilen bezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten 1 sind:



10.4 Parallelschaltung

Die zwei Kanäle sind in Abbildung 1 illustriert. Man beachte, dass dies nicht dasselbe ist wie ein Kanal mit $|\mathcal{X}_1| + |\mathcal{X}_2|$ Input- und $|\mathcal{Y}_1| + |\mathcal{Y}_2|$ Outputsymbolen.

a) Man kann sich leicht überlegen, dass $X_1 \to X_2 \to Y_2$ eine Markovkette ist. Daher ist $I(X_1; Y_2|X_2) = 0$ und somit $I(X_1X_2; Y_2) = I(X_2; Y_2)$. Analog gilt

$$\begin{aligned}
&X_2 \to X_1 \to Y_1 \quad \Rightarrow I(X_2; Y_1|X_1) = 0 \qquad && \Rightarrow I(X_1X_2; Y_1) = I(X_1; Y_1) \\
&Y_1 \to X_1X_2 \to Y_2 \Rightarrow I(Y_1; Y_2|X_1X_2) = 0 &&
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
I(X_1X_2; Y_1Y_2) &= I(X_1X_2; Y_1) + I(X_1X_2; Y_2) - R(X_1X_2; Y_1; Y_2) \\
&= I(X_1X_2; Y_1) + I(X_1X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2) + I(Y_1; Y_2|X_1X_2) \\
&= I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2)
\end{aligned}$$

b) Mit a) folgt

$$\begin{aligned}
C &= \max_{P_{X_1X_2}} I(X_1X_2; Y_1Y_2) \\
&= \max_{P_{X_1X_2}} I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2) \\
&\leq \max_{P_{X_1X_2}} I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) \\
&\leq \max_{P_{X_1X_2}} I(X_1; Y_1) + \max_{P_{X_1X_2}} I(X_2; Y_2) \\
&= C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

c) Andererseits folgt mit a) auch

$$\begin{aligned}
C &= \max_{P_{X_1X_2}} I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2) \\
&\geq \max_{P_{X_1}P_{X_2}} I(X_1; Y_1) + I(X_2; Y_2) - I(Y_1; Y_2) \\
&= \max_{P_{X_1}} I(X_1; Y_1) + \max_{P_{X_2}} I(X_2; Y_2) \\
&= C_1 + C_2.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass das Maximum nur kleiner werden kann, wenn wir anstatt über alle Verteilungen $P_{X_1X_2}$ nur über diejenigen Verteilungen maximieren, bei denen X_1 und X_2 unabhängig sind. In diesem Fall ist sind auch Y_1 und Y_2 unabhängig und somit $I(Y_1, Y_2) = 0$.

Somit haben wir gezeigt, dass sich bei Parallelschaltung von Kanälen die Kapazität summiert.